İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT FAKÜLTESİ

TATBİKİ MEKANİK KOLU

DİPLOMA TRAVAYI

YÖNETEN

PROFESÖR DOKTOR MUSTAFA İNAN

ÖĞRENCİ

MEHMET BİLDİRİCİ

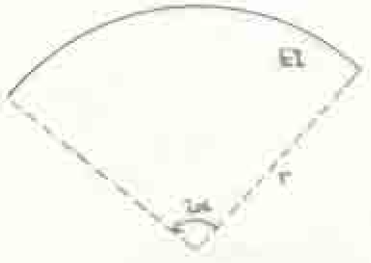
7232

HAZİRAN 1962

AÇIKLAMA

Bu çalışma benim diploma almak için yaptığım son çalışmadır. Teknik bir konudur. Ama en azından bir fikir vereceğine inanıyorum.

KENDİ DÜZLEMLERİNDE YÜKLENMİŞ DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN STATİĞİ



Yarıçapı r ve merkez açısı 2α olan bir dairesel çubuk seçelim. Herhangi bir yükle yüklenmiş olsun. Bir noktanın polar koordinatları da (r,φ) olsun.

Daireden bir kesit alarak herhangibir noktanın deplasmanını inceleyelim:

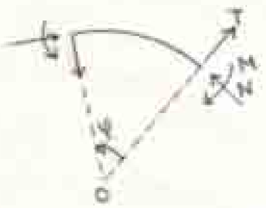
İlk daire formundan bulunan A noktası v teğetsel ve w radyal deplasmanı ile A' noktasına gitmiş olsun

w: İlk eksenden merkeze doğru olursa pozitif

v: A noktasını karakterize eden (r,φ) kutupsal koordinatlarından φ yi artıracak şekilde olanı pozitif

$A(r,\varphi)$ $A'(R,\psi)$ ile gösteriliyor.

Kesit tesirleri için:



φ açısı şekildeki gibi artmak şartı ile meydana gelen M eğilme momenti, T kesme kuvveti ve N normal kuvvetini şekildeki yönler ile gösterelim.

E: sistemin elastisite modülü

I: kesitin tarafsız eksenine göre atalet momenti

Eğilme Halindeki Deformasyon

Şekildeki m noktası deformasyondan sonra m' gitsin $Om'm'$ üçgeninden

$$R = \sqrt{r^2 + (r-w)^2} \quad \text{olur}$$

$$R = \sqrt{r^2 + w^2 - 2rw + r^2} = r\sqrt{\frac{r^2+w^2}{r^2} - \frac{2w}{r} + 1}$$

burada $\frac{r^2+w^2}{r^2}$ yi $1 - \frac{2w}{r}$ yanında terkedersek

$$R \cong r\sqrt{1 - \frac{2w}{r}} \cong r - w \quad \text{bulunur (Binom'a açarak)}$$

En genel eğilme kanunu

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{EI}$$

ρ m' deki eğrilik yarıçapı

kutupsal koordinatlarla

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 - R\frac{d^2R}{d\varphi^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}} \quad \text{bulunur}$$

R nin yukardaki değerinden $\frac{dR}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi}$ $\quad \frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{d^2w}{d\varphi^2}$ olur

yüksek dereceden sonsuz küçükleri $\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2$ terkedersek

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(r-w) + \frac{d^2w}{d\varphi^2}}{(r-w)^2} \quad \text{bulunur}$$

$$\frac{1}{(r-w)^2} = \frac{1}{r^2\left(1-\frac{w}{r}\right)^2} \cong \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2w}{r}\right)$$

bu değeri yukarda yerine koyarak

$$\frac{1}{\rho} = \left[(r-w) + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right]\frac{1 + \frac{2w}{r}}{r^2}$$

yüksek dereceden terimleri terkederek

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{w}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \quad \text{buradan}$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\left[w + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right] = \frac{M}{EI} \quad \text{bulunur}$$

Dönme Fonksiyonu

Bir noktanın ilk formdaki teğeti ile deforme haldeki teğeti arasındaki açı Ω olsun. Eğriliklerdeki değişim dönmenin diferansı olacağından

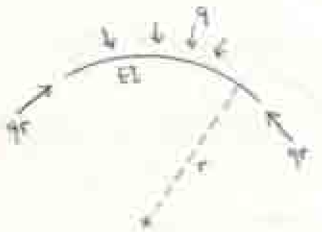
$$\frac{d\Omega}{r\,d\varphi} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$$

$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$ yerine bulduğumuz karşılığında ileride çıkaracağımız $w = \frac{dv}{d\varphi}$ gözönüne alınırsa

$$\frac{d\Omega}{r\,d\varphi} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^3v}{d\varphi^3}\right)$$ bulunur. Entegre ederek

$$\Omega = \frac{1}{r}\left(v + \frac{d^2v}{d\varphi^2}\right)$$

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN RADYAL BASINÇLA BURKULMASI



Kemeri $q = st$ radyal basınç ile yükleyelim. $q < q_k$ olmak şartı ile elemanter teori ile hesap yapılırsa sadece $N = qr$ basınç gerilmesi bulunur. Kemerde diğer kesit tesirleri ve deformasyonlar meydana gelmez. (Euler çubuğu gibi)

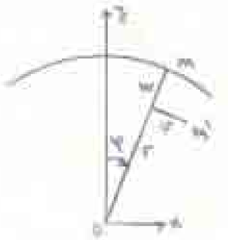
q belirli bir değeri aşarsa sistem deformasyon yapar ve $v \neq 0$ $w \neq 0$ $\Omega \neq 0$ olur. Deforme durum üzerinde denge denklemleri yazılırsa $M \neq 0$ $T \neq 0$ $N \neq qr$ olur. Normal kuvvetin qr den olan farkına da $P \neq 0$ diyelim. Biz bu alt değerin meydana gelmesi ile acaba ikinci bir denge konumu olacak mı?

Burada şu kabulleri yapacağız:

1) Kemerin deformasyonunda normal kuvvetlerden meydana gelen kısalmalar terkedilecek (Liflerde kısalma yok)

2) Kemer kararlı denge durumuna geçtiğinde yani eksen daire olmaktan çıktığında da kuvvetler kemer eksenine dik kalırlar.

Liflerin kısalmadığını ifade eden bağıntı:



m noktasındaki ds elemanı deformasyondan sonra m' de $d\bar{s}$ olsun. Bu elemana ait birim uzama

$$\varepsilon = \frac{d\bar{s} - ds}{ds}$$

Bu elemanın ait açı $d\varphi$, kemer yarıçapı r ise $ds = r\,d\varphi$ olur

$$\varepsilon = \frac{d\bar{s}}{r\,d\varphi} - 1$$

Şekildeki eksenlere göre $d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2$ (A) $\left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2$

deformasyondan sonra $m'(x,y)$ nin Cartezien koordinatları

$$x = (r-w)\sin\varphi + v\cos\varphi \qquad y = (r-w)\cos\varphi - v\sin\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = (r-w)\cos\varphi - \frac{dw}{d\varphi}\sin\varphi - v\sin\varphi + \frac{dv}{d\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -(r-w)\sin\varphi - \frac{dw}{d\varphi}\cos\varphi - v\cos\varphi - \frac{dv}{d\varphi}\sin\varphi$$

Özel olarak $\varphi = 0$ alalım.

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi}\right)^2 = \left(r - w + \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2$$

$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 - 2r\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right) + \left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2}$$

$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = r\sqrt{1 + \frac{\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right)^2}{r^2} - 2\,\frac{\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right)}{r} + \frac{\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2}{r^2}}$$

kök içindeki 2. ve 4. terimleri terkedip Binom'a açarsak

$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = r\left[1 - \frac{\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right)}{r}\right] \qquad \varepsilon = \frac{d\bar{s}}{r\,d\varphi} - 1 = 0 \text{ olması gerektiğinden}$$

$$\varepsilon = \frac{d\bar{s}}{r\,d\varphi} - 1 = \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right) = 0 \qquad w = \frac{dv}{d\varphi} \text{ bulunur}$$

DIFFERANSİYEL DENKLEMİN KURULMASI

Kemerden $d\varphi$ lik bir dilim çıkarıp dengesini düşünelim. Deformasyondan sonra A noktasında M, T, P meydana gelsin, B noktasında da bunlar $M+\frac{dM}{d\varphi}d\varphi$ $\quad P+\frac{dP}{d\varphi}d\varphi$ $\quad T+\frac{dT}{d\varphi}d\varphi$ olsunlar. ρ ise eğrilik yarı çapı olduğundan $ds=\rho\cdot d\varphi$ ds uzunluğuna gelen basınç ise $q\rho\, d\varphi$ olur. Şimdi $T+\frac{dT}{d\varphi}d\varphi$ ve $P+\frac{dP}{d\varphi}d\varphi$ üzerine izdüşüm ile bunların tesir ettiği eksen noktasına göre moment alarak denge denklemlerimizi yazalım.

(1) $\quad T+\frac{dT}{d\varphi}d\varphi+q\rho\, d\varphi \cos\frac{d\varphi}{2}-T\cos d\varphi-(N+P)\sin d\varphi=0$

(2) $\quad N+P+\frac{dP}{d\varphi}d\varphi-(N+P)\cos d\varphi+T\sin d\varphi-q\rho\, d\varphi \sin\frac{d\varphi}{2}=0$

(3) $\quad T\rho\, d\varphi+\frac{dM}{d\varphi}d\varphi=0$

$\sin d\varphi = d\varphi \quad \cos d\varphi = 1$ yazıp kısaltırsak

(1) $\quad \frac{dT}{d\varphi}+q\rho-(N+P)=0 \qquad$ (2) $\quad \frac{dP}{d\varphi}+T=0 \qquad$ (3) $\quad T\rho+\frac{dM}{d\varphi}=0$

M evvelki değeri göz önüne alınarak (3) den

$$T=-\frac{1}{\rho}\frac{dM}{d\varphi}=-\frac{EI}{r^2}\left(\frac{dw}{d\varphi}+\frac{d^3w}{d\varphi^3}\right)\frac{1}{\rho}$$

ρ yerine yaklaşık olarak r yazarak

$$T=-\frac{EI}{r^3}\left(\frac{dw}{d\varphi}+\frac{d^3w}{d\varphi^3}\right) \quad \text{bulunur.}$$

(1) ifadesinde $N=qr$ yazarak $P=\frac{dT}{d\varphi}+q(\rho-r)$ bulunur.

Eğilme kanunundan $(\rho-r)=-\frac{M}{EI}\frac{1}{r^2}$ M ve T yerine konarak

$$P=-q\left(w+\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right)-\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2}+\frac{d^4w}{d\varphi^4}\right) \quad \text{bulunur.}$$

Bu değerler (2) de yerine konarak

$$\frac{d^5 w}{d\varphi^5} + \left(2 + \frac{qr^3}{EI}\right)\frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \left(1 + \frac{qr^3}{EI}\right)\frac{dw}{d\varphi} = 0$$

$1 + \frac{qr^3}{EI} = \gamma^2$ diyerek $w = \frac{dv}{d\varphi}$ yerine yazarak

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + (1+\gamma^2)\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \gamma^2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0$$ bulunur.

Denklemin çözümü: $v = e^{m\varphi}$ yazarak

karakteristik denklem $m^6 + (1+\gamma^2)m^4 + \gamma^2 m^2 = 0$

$m_1 = 0$ $\quad m_3 = i$ $\quad m_5 = \gamma i$ bulunur
$m_2 = 0$ $\quad m_4 = -i$ $\quad m_6 = -\gamma i$

Çözüm: $v = C_1 + C_2 \operatorname{Cos}\varphi + C_3 \operatorname{Cos}\gamma\varphi + C_4\varphi + C_5 \operatorname{Sin}\varphi + C_6 \operatorname{Sin}\gamma\varphi$

BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU İLE ÇÖZÜM

Başlangıçtaki kesit ve deformasyonlar $v_0, w_0, \Omega_0, M_0, T_0, P_0$ olsun, hesaplarda gelişigüzel katsayılar yerine fizik manaları olan bu katsayıları kullanacağız. v fonksiyonunu bulduktan sonra bunları kolayca v cinsinden bulacağız.

Evvelki hesaplardan:

$$w = \frac{dv}{d\varphi}$$

$$\Omega = \frac{1}{r}\left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2}\right)$$

$$M = \frac{EI}{r^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3}\right)$$

$$T = -\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{d^4 v}{d\varphi^4}\right)$$

$$P = -q\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3}\right) - \frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{d^5 v}{d\varphi^5}\right)$$

$$v = C_1 + C_2 \cos\varphi + C_3 \cos\zeta\varphi + C_4\varphi + C_5 \sin\varphi + C_6 \sin\zeta\varphi$$

$$v' = -C_2 \sin\varphi - C_3\zeta \sin\zeta\varphi + C_4 + C_5 \cos\varphi + C_6 \zeta \cos\zeta\varphi$$

$$v'' = -C_2 \cos\varphi - C_3\zeta^2 \cos\zeta\varphi - C_5 \sin\varphi - C_6 \zeta^2 \sin\zeta\varphi$$

$$v''' = C_2 \sin\varphi + C_3\zeta^3 \sin\zeta\varphi - C_5 \cos\varphi - C_6 \zeta^3 \cos\zeta\varphi$$

$$v^{IV} = C_2 \cos\varphi + C_3\zeta^4 \cos\zeta\varphi + C_5 \sin\varphi + C_6 \zeta^4 \sin\zeta\varphi$$

$$v^{V} = -C_2 \sin\varphi - C_3\zeta^5 \sin\zeta\varphi + C_5 \cos\varphi + C_6 \zeta^5 \cos\zeta\varphi$$

kesitler ve deformasyonlar tespit edilirse

$$v = C_1 + C_2 \cos\varphi + C_3 \cos\zeta\varphi + C_4\varphi + C_5 \sin\varphi + C_6 \sin\zeta\varphi$$

$$w = -C_2 \sin\varphi - C_3\zeta \sin\zeta\varphi + C_4 + C_5 \cos\varphi + C_6 \zeta \cos\zeta\varphi$$

$$\Omega = \frac{1}{r}\{C_1 + C_3 (1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi + C_4\varphi + C_6(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi\big]$$

$$M = \frac{EI}{r^2}\left[-C_3\zeta(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi + C_4 + C_6\zeta(1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi\right]$$

$$T = -\frac{EI}{r^3}\left[-C_3\zeta^2(1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi - C_6\zeta^2(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi\right]$$

$$P = -q\left[-C_3\zeta(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi + C_4 + C_6\zeta(1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi\right] - \frac{EI}{r^3}\left[C_3\zeta^3(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi - C_6\zeta^3(1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi\right]$$

$\varphi = 0$ başlangıç değerleri bulunacağından

$$v_0 = C_1 + C_2 + C_3 \qquad M_0 = \frac{EI}{r^2}\left[C_4 + C_6\zeta(1-\zeta^2)\right]$$

$$w_0 = C_4 + C_5 + C_6\zeta \qquad T_0 = \frac{EI}{r^3} C_3 \zeta^2(1-\zeta^2)$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{r}\left[C_1 + C_3(1-\zeta^2)\right]$$

$$P_0 = -q\left[C_4 + C_6\zeta(1-\zeta^2)\right] + \frac{EI}{r^3} C_6\zeta^3(1-\zeta^2)$$

buradan başlangıç değerlerine bağlı katsayılar

$$C_1 = \Omega_0 r - \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{\zeta^2} \qquad C_2 = v_0 - \Omega_0 r - \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{1-\zeta^2} \qquad C_3 = \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{\zeta^2(1-\zeta^2)}$$

$$C_4 = M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^2} - P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{\xi^2} \qquad C_5 = w_0 - P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{1-\xi^2}$$

$$C_6 = P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{\xi^3(1-\xi^2)} - M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^3}$$

fonksiyonlar

$$v = \Omega_0 r - \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{\xi^2} + v_0 \cos\varphi - \Omega_0 r \cos\varphi - \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{1-\xi^2}\cos\varphi + \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{\xi^2(1-\xi^2)}\cos\xi\varphi$$
$$+ M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^2}\varphi - P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{\xi^2}\varphi + w_0 \sin\varphi - P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{1-\xi^2}\sin\varphi + P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{\xi^3(1-\xi^2)}\sin\xi\varphi$$
$$- M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^3}\sin\xi\varphi$$

$$w = - v_0 \sin\varphi + \Omega_0 r \sin\varphi + \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{1-\xi^2}\sin\varphi - \frac{r^3}{EI}\frac{T_0}{\xi(1-\xi^2)}\sin\xi\varphi + M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^2}$$
$$- P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{\xi^2} + w_0 \cos\varphi - P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{1}{(1-\xi^2)}\cos\varphi + P_0 \frac{r^3}{EI}\frac{\cos\xi\varphi}{\xi^2(1-\xi^2)} - M_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^2}\cos\xi\varphi$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{r^2}{EI}\frac{T_0}{\xi^2} + \frac{r^2}{EI}\frac{T_0}{\xi^2}\cos\xi\varphi + M_0 \frac{r}{EI}\frac{1}{\xi^2}\varphi + P_0 \frac{r^2}{EI\,\xi^2}\varphi$$
$$+ P_0 \frac{r^2}{EI}\frac{1}{\xi^3}\sin\xi\varphi - M_0 \frac{r}{EI}\frac{1-\xi^2}{\xi^3}\sin\xi\varphi$$

$$M = -\frac{r}{\xi} T_0 \sin\xi\varphi + M_0 \frac{1}{\xi^2} - P_0 \frac{r}{\xi^2} + P_0 \frac{r}{\xi^2}\cos\xi\varphi - M_0 \frac{1-\xi^2}{\xi^2}\cos\xi\varphi$$

$$T = T_0 \cos\xi\varphi + P_0 \frac{1}{\xi}\sin\xi\varphi - M_0 \frac{1}{r}\frac{1-\xi^2}{\xi}\sin\xi\varphi$$

$$P = -\frac{qr^3}{EI}\frac{T_0}{\xi}\sin\xi\varphi + M_0 \frac{qr^2}{EI}\frac{1}{\xi^2} - P_0 \frac{qr^3}{EI}\frac{1}{\xi^2} + P_0 \frac{qr^3}{EI}\frac{1}{\xi^2}\cos\xi\varphi$$
$$- M_0 \frac{qr^2}{EI}\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\cos\xi\varphi + T_0 \xi \sin\xi\varphi - P_0 \cos\xi\varphi + M_0 \frac{1}{r}(1-\xi^2)\cos\xi\varphi$$

Boyutsuz Değişkenlerle :

$$v = \frac{v}{r} \qquad w = \frac{w}{r} \qquad M = M\frac{r}{EI} \qquad T = T\frac{r^2}{EI} \qquad P = P\frac{r^3}{EI}$$

Şimdi kesitler ve deformasyonlar boyutsuz sayılardır.

Bundan böyle bütün hesaplarda $EI = st$ kabul edilmiştir.

Fonksiyonları aşağıdaki gibi düzenliyelim

$$v = f_{11}(\varphi)\, v_0 + f_{12}(\varphi)\, w_0 + f_{13}(\varphi)\, \tau_0 + f_{14}(\varphi)\, M_0 + f_{15}(\varphi)\, T_0 + f_{16}(\varphi)\, P_0$$

$$w = f_{21}(\varphi)\, v_0 + f_{22}(\varphi)\, w_0 + \cdots$$

$$M = f_{31}(\varphi)\, v_0 + f_{32}(\varphi)\, w_0 + \cdots$$

Aşağıda tarif edilen matrise taşıma matrisi diyelim

$$F(\varphi) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{26} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ f_{61} & & & & \cdots & f_{66} \end{vmatrix}$$

Taşıma Matrisinin özellikleri

1) $\gamma \to 1$ differansiyel denklemi (homogen)

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0$$ dairesel çubukların genel

yükleme halinin taşıma matrisini verir.

2) $F(\varphi_1)\, F(\varphi_2) = F(\varphi_1 + \varphi_2)$ özelliği vardır.

3) $|F(\varphi)| = 1$ φ nin her değeri için

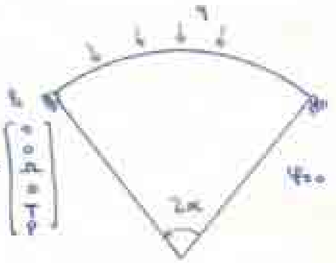
özel olarak $\varphi = 0$ için

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & 1 & & \\ \vdots & & & & 1 & \\ 0 & & & & & -1 \end{vmatrix} = -1$$

F(φ) taşıma matrisi

	v_o	w_o	Ω_o	M_o	T_o	P_o
v	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$1-\cos\varphi$	$\frac{\zeta\varphi-\sin\zeta\varphi}{\zeta^3}$	$\frac{\zeta^2(1-\cos\varphi)-(1-\cos\zeta\varphi)}{\zeta^2(1-\zeta^2)}$	$\frac{-\zeta(1-\zeta^2)\varphi-\zeta^3\sin\varphi+\sin\zeta\varphi}{\zeta^3(1-\zeta^2)}$
w	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\frac{1-\cos\zeta\varphi}{\zeta^2}$	$\frac{\zeta\sin\varphi-\sin\zeta\varphi}{\zeta(1-\zeta^2)}$	$\frac{\zeta^2(1-\cos\varphi)-(1-\cos\zeta\varphi)}{\zeta^2(1-\zeta^2)}$
Ω	0	0	1	$\frac{\zeta\varphi-(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi}{\zeta^3}$	$\frac{\cos\zeta\varphi-1}{\zeta^2}$	$\frac{-\zeta\varphi+\sin\zeta\varphi}{\zeta^3}$
M	0	0	0	$\frac{1-(1-\zeta^2)\cos\zeta\varphi}{\zeta^2}$	$-\frac{\sin\zeta\varphi}{\zeta}$	$\frac{-1+\cos\zeta\varphi}{\zeta^2}$
T	0	0	0	$-\frac{(1-\zeta^2)\sin\zeta\varphi}{\zeta}$	$\cos\zeta\varphi$	$\frac{\sin\zeta\varphi}{\zeta}$
P	0	0	0	$\frac{(1-\zeta^2)(\cos\zeta\varphi-1)}{\zeta^2}$	$\frac{\sin\zeta\varphi}{\zeta}$	$\frac{(1-\zeta^2)-\cos\zeta\varphi}{\zeta^2}$

İKİ UCU MAFSALLI KEMER



$$S(2\alpha)=\begin{bmatrix}0\\0\\\Omega\\0\\T\\P\end{bmatrix} \qquad \varphi=0 \quad S(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\Omega_0\\0\\T_0\\P_0\end{bmatrix}$$

$S(0)$ başlangıç kolon matrisi ile $F(\varphi)$ yardımıyla $S(2\alpha)$ ya geçebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha) \cdot S(0)$$

B mesnedinin şartları olan 1, 2, 4 satırları yazarsak

$$f_{13}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{15}(2\alpha)\,T_0 + f_{16}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{23}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{25}(2\alpha)\,T_0 + f_{26}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{43}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{45}(2\alpha)\,T_0 + f_{46}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

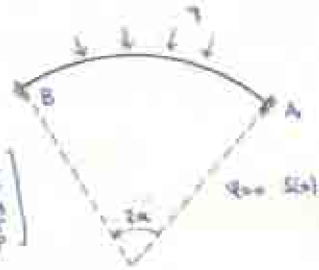
(Ω_0, T_0, P_0) trivial çözüm olmaması yani daireden farklı denge konumu olması için bu takımın katsayılar determinantı sıfır olmalı.

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & \dfrac{\xi^2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\xi\alpha)}{\xi^2(1-\xi^2)} & \dfrac{-\xi(1-\xi^2)2\alpha-\xi^3\sin 2\alpha+\sin 2\xi\alpha}{\xi^3(1-\xi^2)} \\ \sin 2\alpha & \dfrac{\xi\sin 2\alpha-\sin 2\xi\alpha}{\xi(1-\xi^2)} & \dfrac{\xi^2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\xi\alpha)}{\xi^2(1-\xi^2)} \\ 0 & -\dfrac{\sin 2\xi\alpha}{\xi} & \dfrac{-1+\cos 2\xi\alpha}{\xi^2} \end{vmatrix} = 0$$

Determinant açılırsa

$$\sin \alpha\xi = 0 \qquad \left(1-\frac{1}{\alpha}\,tg\,\alpha\right)-\frac{1}{\xi^2}\left(1-\frac{1}{\alpha\xi}\,tg\,\alpha\xi\right)=0 \quad \text{çıkar}$$

İKİ UCU ANKASTRE KEMER



$$S(2\alpha)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\M\\T\\P\end{bmatrix} \qquad S(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\M_0\\T_0\\P_0\end{bmatrix}$$

$S(0)$ başlangıç kolon matrisi ile $F(\varphi)$ yardımı ile $S(2\alpha)$ ya geçebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha)\cdot S(0)$$

B mesnedinin şartları olan 1,2,3 satırları yazarsak

$$f_{14}(2\alpha)\,M_0 + f_{15}(2\alpha)\,T_0 + f_{16}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{24}(2\alpha)\,M_0 + f_{25}(2\alpha)\,T_0 + f_{26}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{34}(2\alpha)\,M_0 + f_{35}(2\alpha)\,T_0 + f_{36}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

M_0, T_0, P_0 için trivial olmayan bir çözüm için yani daireden farklı denge konumu için bu bulunan katsayılar determinantı sıfır olmalı

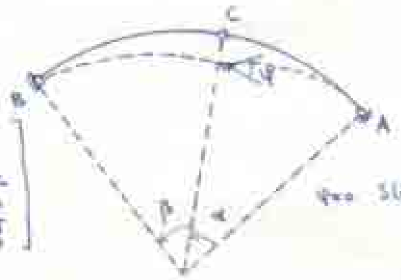
$$\begin{vmatrix}
\dfrac{2\zeta\alpha-\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3} & \dfrac{\zeta^2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\zeta\alpha)}{\zeta^2(1-\zeta^2)} & \dfrac{-\zeta(1-\zeta^2)2\alpha-\zeta^3\sin 2\alpha+\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3(1-\zeta^2)}\\[2ex]
\dfrac{1-\cos 2\zeta\alpha}{\zeta^2} & \dfrac{\zeta\sin 2\alpha-\sin 2\zeta\alpha}{\zeta(1-\zeta^2)} & \dfrac{\zeta^2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\zeta\alpha)}{\zeta^2(1-\zeta^2)}\\[2ex]
\dfrac{2\zeta\alpha-(1-\zeta^2)\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3} & \dfrac{\cos 2\zeta\alpha-1}{\zeta^2} & \dfrac{-2\zeta\alpha+\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3}
\end{vmatrix}=0$$

Determinant açılırsa

$$\zeta\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha\zeta=0 \qquad (1-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha)-\frac{1}{\zeta^2}(1-\alpha\zeta\,\mathrm{cotg}\,\alpha\zeta)=0$$

bulunur.

ÜÇ MAFSALLI KEMER



$S_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \\ 0 \\ T \\ P \end{bmatrix}$ $\qquad \varphi = 0 \quad S(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \\ T_0 \\ P_0 \end{bmatrix}$

Üç mafsallı kemerlerde $\varphi = \alpha$ için bir süreksizlik vardır. σ, ω ve M fonksiyonlarında bir sıçrama yok. Dönmedeki süreksizlik ψ olsun. T ve P deki süreksizlik mafsalın denge denkleminden

$K_1 = N + P_1 \qquad K_2 = N + P_2$ dersek

K_1 ve T_1 ψ deplasmanından önce

$K_2 = K_1 \cos\psi - T_1 \sin\psi$

$T_2 = T_1 \cos\psi + K_1 \sin\psi \qquad \sin\psi = \psi$

açılar küçük olduğundan $\cos\psi = 1$

$\Delta K = K_2 - K_1 = -T_1 \psi \qquad \Delta K = -T_1 \psi$

$\Delta T = T_2 - T_1 = K_1 \psi \qquad \Delta T = qr\psi + P_1 \psi$

T_1 ve P_1 değerleri ikinci derece olduğundan bunların ψ ile çarpımları terkedilebilir.

O halde K (dolayısıyla P) fonksiyonunda süreksizlik yok.

T deki süreksizlik $+qr\psi$

boyutsuz değişkenlerle $qr \frac{r^2}{EI} \psi = (\gamma^2 - 1)\psi$ bulunur.

K süreksizlik kolon matrisi $K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \\ 0 \\ (\gamma^2 - 1)\psi \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

$S(0)$ kolon matris A mesnedi için

$S_1(\alpha) = F(\alpha) \cdot S(0)$ C mesnedi hemen önce

$S_2(\alpha) = S_1(\alpha) + K$ " " sonra

$S_2(\alpha)$ bulunduktan sonra β ilerdeki B mesnedi için

$$S(\beta)_B = F(\beta)\left[F(\alpha) \cdot S(0) + K\right]$$

$$S(\beta) = \left[F(\beta) \cdot F(\alpha)\right] S(0) + F(\beta) \cdot K$$

çarpım özelliğinden faydalanarak

$$S(\beta) = F(\alpha+\beta) \cdot S(0) + F(\beta) \cdot K$$

Bu ifadeden B mesnedinin şartları olan 1,2,4 satırları için yazarak

$$f_{13}(\alpha+\beta)\,\Omega_0 + f_{15}(\alpha+\beta)\,T_0 + f_{16}(\alpha+\beta)\,P_0 + \left\{f_{13}(\beta) + (\xi^2-1)\,f_{15}(\beta)\right\}\psi = 0$$

$$f_{23}(\alpha+\beta)\,\Omega_0 + f_{25}(\alpha+\beta)\,T_0 + f_{26}(\alpha+\beta)\,P_0 + \left\{f_{23}(\beta) + (\xi^2-1)\,f_{25}(\beta)\right\}\psi = 0$$

$$f_{43}(\alpha+\beta)\,\Omega_0 + f_{45}(\alpha+\beta)\,T_0 + f_{46}(\alpha+\beta)\,P_0 + \left\{f_{43}(\beta) + (\xi^2-1)\,f_{45}(\beta)\right\}\psi = 0$$

4 cü denklem mafsalda momentin sıfır olmasından

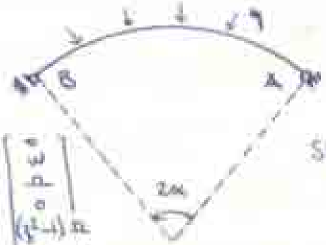
$$f_{43}(\alpha)\,\Omega_0 + f_{45}(\alpha)\,T_0 + f_{46}(\alpha)\,P_0 = 0$$

Bu 4 lineer denklemin katsayılar determinanı ise stabilite şartını verecek.

ÜÇ MAFSALLI KEMER STABİLİTE ŞARTI

Ω_0	T_0	P_0	ψ
$1 - \cos(\alpha+\beta)$	$\dfrac{\zeta^2\left[1-\cos(\alpha+\beta)\right] - 1 + \cos\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta^2(1-\zeta^2)}$	$\dfrac{-\zeta(1-\zeta^2)(\alpha+\beta) - \zeta^3\sin(\alpha+\beta) + \sin\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta^3(1-\zeta^2)}$	$\dfrac{1-\cos\zeta\beta}{\zeta^2}$
$\sin(\alpha+\beta)$	$\dfrac{\zeta\sin(\alpha+\beta) - \sin\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta(1-\zeta^2)}$	$\dfrac{\zeta^2\left[1-\cos(\alpha+\beta)\right] - 1 + \cos\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta^2(1-\zeta^2)}$	$\dfrac{\sin\zeta\beta}{\zeta}$
0	$-\dfrac{\sin\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta}$	$\dfrac{-1+\cos\zeta(\alpha+\beta)}{\zeta^2}$	$\dfrac{(1-\zeta^2)}{\zeta}\sin\zeta\beta$
0	$-\dfrac{\sin\zeta\alpha}{\zeta}$	$\dfrac{-1+\cos\zeta\alpha}{\zeta^2}$	0

BIR UCU KAYICI MAFSALLI KEMER



$$S(2\alpha)=\begin{bmatrix}0\\ \omega\\ \Omega\\ 0\\ (\zeta^2-1)\Omega\\ P\end{bmatrix} \qquad S(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Omega_0\\ 0\\ T_0\\ P_0\end{bmatrix}$$

$S(0)$ başlangıç kolon matrisinden $F(\varphi)$ taşıma matrisi ile $S(2\alpha)$ kolon matrisine geçebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha)\cdot S(0)$$

B mesnedinin şartları olan 1, 4, 5 satırları yazarak

$$f_{13}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{15}(2\alpha)\,T_0 + f_{16}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{43}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{45}(2\alpha)\,T_0 + f_{46}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$\left\{f_{53}(2\alpha)-(\zeta^2-1)f_{33}(2\alpha)\right\}\Omega_0 + \left\{f_{55}(2\alpha)-(\zeta^2-1)f_{35}(2\alpha)\right\}T_0 + \left\{f_{56}(2\alpha)-(\zeta^2-1)f_{36}(2\alpha)\right\}P_0$$

Ω_0, T_0, P_0 nın trivial olmıyan değerler alması yani ikinci bir denge konumunun olması için bu takımın katsayılar $\Delta=0$ olmalı.

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & \dfrac{\zeta^2(1-\cos 2\alpha)-1+\cos 2\zeta\alpha}{\zeta^2(1-\zeta^2)} & \dfrac{-\zeta(1-\zeta^2)2\alpha-\zeta^3\sin 2\alpha+\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3(1-\zeta^2)} \\ 0 & -\dfrac{\sin 2\zeta\alpha}{\zeta} & \dfrac{-1+\cos 2\zeta\alpha}{\zeta^2} \\ (1-\zeta^2) & \dfrac{\zeta^2-1+\cos 2\zeta\alpha}{\zeta^2} & \dfrac{\sin 2\zeta\alpha+2\zeta\alpha(\zeta^2-1)}{\zeta^3} \end{vmatrix} = 0$$

Determinant açılırsa

$$2\cos 2\alpha + 2\zeta\alpha(\zeta^2-1)\sin 2\zeta\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 2\zeta\alpha\cos 2\alpha - \zeta^3\sin 2\alpha\sin 2\zeta\alpha = 0$$

$$2\cos 2\alpha + 2z\alpha(z^2-1)\sin 2z\alpha \cos 2\alpha - 2\cos 2z\alpha \cos 2\alpha - z^3 \sin 2\alpha \sin 2z\alpha = 0$$

Denklemin Çözümü:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

$$-z(0.342z^2 + 0.524)\sin\frac{\pi z}{3} - \cos\frac{\pi z}{3} + 1 = 0$$

$z = 2.79 \quad +0.046$

$z = 2.78 \quad -0.05 \qquad z = 2.785 \qquad z = 6.0$

2) $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$$z(-1.313z^2 + 1.047)\sin\frac{2\pi z}{3} + \cos\frac{2\pi z}{3} - 1 = 0$$

$z = 1.64 \quad -0.037$

$z = 1.65 \quad +0.150 \qquad z = 1.642 \qquad z = 3.0$

3) $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$-1.57z(z^2-1)\sin \pi z + \cos \pi z - 1 = 0$$

$z = 1.35 \quad +0.09$

$z = 1.34 \quad -0.005 \qquad z = 1.340 \qquad z = 2.0$

4) $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$$z(-1.218z^2 + 2.084)\sin\frac{4\pi z}{3} + \cos\frac{4\pi z}{3} - 1 = 0$$

$z = 1.38 \quad +0.030$

$z = 1.37 \quad -0.003 \qquad z = 1.371 \qquad z = 1.5$

5) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

$$z(3.486z^2 - 2.62)\sin\frac{5\pi}{3}z - \cos\frac{5\pi z}{3} + 1 = 0$$

$z = 1.2$

6) $\alpha = \pi = 180^\circ$

$$3.14z(z^2-1)\sin 2\pi z - \cos 2\pi z + 1 = 0$$

$z = 1 \quad 0 \qquad z = 1.546 \quad 0.028$

7) $\alpha = \frac{5\pi}{12} = 75°$

$z(2.26 - 2.76 z^2) \sin \frac{5\pi}{6} z + 1.732 \cos \frac{5\pi}{6} z - 1.732 = 0$

$z = 1.45$ $\quad +0.003$ $\quad$ kök $z = 1.450$ $\quad z = 2.40$

8) $\alpha = \frac{5\pi}{9} = 100°$

$z(1.281 - 2.325 z^2) \sin \frac{10\pi}{9} z + 1.88 \cos \frac{10\pi}{9} z - 1.88 = 0$

$z = 1.30$ $\quad -0.07$
$z = 1.31$ $\quad +0.16$ $\quad$ kök $z = 1.303$

9) $\alpha = \frac{7\pi}{12} = 105°$

$z(1.178 - 2.678 z^2) \sin \frac{7\pi}{6} z + 1.732 \cos \frac{7\pi}{6} - 1.732 = 0$

$z = 1.30$ $\quad +0.10$
$z = 1.25$ $\quad -0.066$ $\quad$ kök $z = \cancel{1.284}$ $\quad z = 1.294$

10) $\alpha = \frac{11\pi}{18} = 110°$

$z(2.34 - 2.288 z^2) \sin \frac{11\pi}{9} z + 1.532 \cos \frac{11\pi}{9} z - 1.532 = 0$

$z = 1.30$ $\quad +0.066$
$z = 1.25$ $\quad -0.065$ $\quad$ kök $z = 1.295$

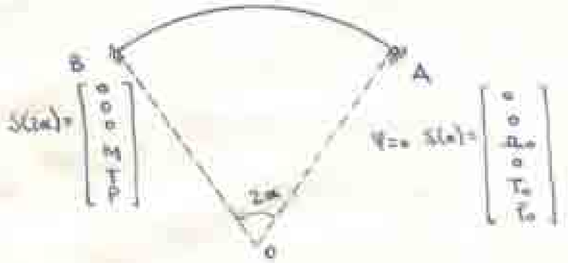
11) $\alpha = \frac{3\pi}{4} = 135°$

$z^3 \sin \frac{3\pi}{2} z = 0$ $\quad$ kök $z = 1.333$

Bulduğumuz z ve $x = z^2 - 1$ değerlerini bir tabloda toplayalım.

α	30°	60°	75°	90°	100°	105°	110°	120°	135	150°	180°
z	2.185	1.642	1.450	1.340	1.303	1.294	1.295	1.371	1.333	1.20	1.0
x	3.76	1.70	1.10	0.80	0.70	0.67	0.68	0.88	0.78	0.44	0

BİR UCU MAFSALLI, BİR UCU ANKASTRE KEMER



Matris bilgisi ile F(φ) taşıma matrisi ve başlangıçtaki S(0) kolon matrisinden S(2α) geçebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha)\, S(0)$$

Burada B mesnedinin şartları olan ilk üç satırı yazarsak

$$f_{14}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{15}(2\alpha)\,T_0 + f_{16}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{24}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{25}(2\alpha)\,T_0 + f_{26}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

$$f_{34}(2\alpha)\,\Omega_0 + f_{35}(2\alpha)\,T_0 + f_{36}(2\alpha)\,P_0 = 0$$

Ω_0, T_0, P_0 için trivial çözüm olmaması için katsayılar determinantı sıfır olmalı

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & \dfrac{\zeta^2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\zeta\alpha)}{\zeta^2(1-\zeta^2)} & \dfrac{-\zeta(1-\zeta^2)2\alpha-\zeta^3\sin 2\alpha+\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3(1-\zeta^2)} \\ \sin 2\alpha & \dfrac{\zeta\sin 2\alpha-\sin 2\zeta\alpha}{\zeta(1-\zeta^2)} & \dfrac{\zeta(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\zeta\alpha)}{\zeta^2(1-\zeta^2)} \\ 1 & \dfrac{\cos 2\zeta\alpha-1}{\zeta^2} & -\dfrac{2\zeta\alpha+\sin 2\zeta\alpha}{\zeta^3} \end{vmatrix}$$

Determinantı açıp düzenlersek (ζ bölerek)

$$2(\zeta^2-\zeta^4-1)\cos 2\alpha \cos 2\zeta\alpha - \zeta(1+\zeta^2)\sin 2\alpha \sin 2\zeta\alpha + 2(1-\zeta^2)\cos 2\alpha$$
$$-2\zeta\alpha(1-\zeta^2)\sin 2\zeta\alpha \cos 2\alpha - 2\zeta^2(1-\zeta^2)\cos 2\zeta\alpha + 2\zeta^2\alpha(1-\zeta^2)\cos 2\zeta\alpha \sin 2\alpha + 2\zeta^2 = 0$$

Denklemin çözümü:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

$$\left[0.083\,\zeta^4 - 0.083\,\zeta^2 - 1.0\right]\cos\frac{\pi\zeta}{3} - \left[0.343\,\zeta^3 + 1.283\,\zeta\right]\sin\frac{\pi\zeta}{3} + 1 + \zeta^2 = 0$$

$\zeta = 7.20 \quad -6.20$
$\zeta = 7.19 \quad +0.05 \qquad 6.0 < 7.190 < 8.621$
$\zeta = 7.18 \quad +3.50$

2) $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$$\left[1.195\,\zeta^4 - 1.195\,\zeta^2 + 1\right]\cos\frac{2\pi\zeta}{3} - \left[1.913\,\zeta^3 - 0.181\,\zeta\right]\sin\frac{2\pi\zeta}{3} + 3\zeta^2 - 1 = 0$$

$\zeta = 3.62 \quad +2.80 \qquad 3.0 < 3.625 < 4.375$
$\zeta = 3.63 \quad -2.65$

3) $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$(2\zeta^4 - 2\zeta^2 + 1)\cos\pi\zeta - 1.57\,\zeta(\zeta^2-1)\sin\pi\zeta + 2\zeta^2 - 1 = 0$$

$\zeta = 2.45 \quad +1.55 \qquad 2 < 2.458 < 3.0$
$\zeta = 2.46 \quad -0.42$

4) $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$$\left[6.629\,\zeta^4 - 6.629\,\zeta^2 + 1\right]\cos\frac{4\pi\zeta}{3} - (1.218\,\zeta^2 - 2.950)\,\zeta\sin\frac{4\pi\zeta}{3} + 3\zeta^2 - 1 = 0$$

$\zeta = 1.90 \quad +0.81 \qquad 1.5 < 1.903 < 2.364$
$\zeta = 1.91 \quad -2.23$

5) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

$$\left[5.534\,\zeta^4 - 5.534\,\zeta^2 + 1.0\right]\cos\frac{5\pi}{3}\zeta + \zeta\,(2.950\,\zeta^2 - 1.218)\sin\frac{5\pi}{3}\zeta + \zeta^2 + 1 = 0$$

$\zeta = 1.60 \quad +1.06 \qquad 1.2 < 1.608 < 2.066$
$\zeta = 1.61 \quad -0.29$

6) $\alpha = \pi = 180^\circ$

$$3.14\,\zeta(\zeta^2-1)\,\mathrm{Sin}\,2\pi\zeta - \mathrm{Cos}\,2\pi\zeta + 1 = 0$$

$\zeta = 1.0$ $\quad 0 \quad$ $\zeta = 1.546$ $\quad +0.01$

$\varkappa$ Katsayılarının Bulunması

$\zeta^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI}$ demiştik $\quad \zeta^2 - 1 = \varkappa$ ile yeni bir katsayı tanımlayalım $q_{kr} = \varkappa \frac{EI}{r^3}$ olur.

Çözdüğümüz problemlerin $\zeta = \zeta(\alpha)$ ve $\varkappa = \varkappa(\alpha)$ tablolarını yapalım.

ζ değerleri

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	2,785	1.642	1.340	1.371	1.2	1.0
	6.0	3.0	2.0	1.5	1.2	1.0
	7.130	3.625	2.458	1.903	1.668	1.0
	8.621	4.375	3.0	2.364	2.066	1.0

$\varkappa$ değerleri

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	6.76	1.70	0.80	0.88	0.44	0
	35.0	8.0	3.0	1.25	0.44	0
	51.70	12.14	5.03	2.62	1.53	0
	73.32	18.14	8.0	4.59	3.27	0